

4. cvičení - teorie

K = konverguje, D = diverguje, AK = absolutně konverguje

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečná řada**. Pro $m \in \mathbb{N}$ definujeme **m -tý částečný součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako

$$s_m = \sum_{n=1}^m a_n.$$

Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě říkáme, že řada **diverguje**.

Platí:

$\alpha \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ K a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ K, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ K a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

Věta 7.1 (Nutná podmínka konvergence). Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Věta 7.6. Necht' $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ K} \iff \alpha > 1.$$

Věta 7.7 (Lebnizovo kritérium). Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Necht' platí

- $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ K.

Věta 7.4 (Cauchyovo odmocninové kritérium). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(d) $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium). (a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K.

(b) $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(c) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D

Věta 7.8. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ K. Pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K.

Definice. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada konvergentní ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Mohlo by se hodit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Podobné limity - x je v základu mocniny i v exponentu - se řeší pomocí triku $a^b = e^{b \log a}$, Heine a VoLSF...

Více viz Matematika 1 - např.: [https://www.karlin.mff.cuni.cz/~dvorakova/pdf/M1%20-%202020 23-24/resene_priklady_7.pdf](https://www.karlin.mff.cuni.cz/~dvorakova/pdf/M1%20-%202020%2023-24/resene_priklady_7.pdf)

Věta (O posloupnosti s kladnými členy - 1. semestr). Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = A^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$.

Řady typu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ lze řešit buď Leibnizem, nebo pomocí Věty 7.8.